



TITLE:

循環型シフト回路の埋め込み面積 について (形式言語理論とオートマ トン理論)

AUTHOR(S):

瀬谷, 和夫; 丸岡, 章; 木村, 正行

CITATION:

瀬谷, 和夫 ...[et al]. 循環型シフト回路の埋め込み面積について (形式言語理論とオートマトン理論). 数理解析研究所講究録 1982, 458: 122-131

ISSUE DATE:

1982-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103079>

RIGHT:

循環型シフト回路の埋め込み面積について

東北大 工学部 瀬谷和夫

丸岡 章

木村正行

Thompson は FFT やソーティングがシャフルエクスチェンジグラフで表わされる接続パターンを持つ循環型の回路で実行できることを示し、FFT やソーティングを実行する回路の面積を評価する問題を、シャフルエクスチェンジグラフを埋め込むのに必要な格子平面の面積を評価する問題に帰着した。 N 頂点のシャフルエクスチェンジグラフの埋め込み面積については Thompson が $O(N^2/\log^{\frac{1}{2}}N)$ の結果^[1] を、Steinberg, Rodeh が $O(N^2/\log N)$ の結果^[2] を、Kleitman らが $O(N^2/\log^2 N)$ の結果^[3] を得ている。但し最後の結果は十分大きな N に対してのみ具体的なレイアウトを与えたもので実用的ではない。本報告では、まず $N=2^n$ として $N-1$ 入力巡回シフト回路がダブルシャフルグラフで表わされる接続パターンを持つ循環型の回路で実現できることを示す。このことより、シフト回路の面積評価の問題はダブルシャフルグラフを格子平面に埋め込むの

に必要となる面積を求める問題に帰着されるが、このグラフの埋め込み面積が、前述のシャフルエクスチェンジグラフの埋め込みを利用すると $O(N^2/\log^2 N)$, $O(N^2/\log N)$, 及び $O(N^2/\log^2 N)$ となることを導く。

M を自然数とし、 $m = \lceil \log M \rceil$ とおく。巡回シフトの機能をもつ回路とは、 M 個の入力端子、 M 個の出力端子及び m 個の制御入力端子を持ち、入力、出力、制御入力端子に割り当てられる変数をそれぞれ x_0, x_1, \dots, x_{M-1} , y_0, y_1, \dots, y_{M-1} , z_0, z_1, \dots, z_{m-1} とし、 $|Z| = \sum_i z_i \cdot 2^i$ とするとき、 $y_j = x_{(j-|Z|) \bmod M}$ が任意の $x_0, \dots, x_{M-1}, z_0, \dots, z_{m-1} \in \{0, 1\}$ に対して成立する回路である。

ここでは図1の素子を用いて巡回シフト回路を構成する。いずれの素子の機能も丁度1本の入力線上に $\{0, 1\}$ の元 z が、他の入力線には $*$ が割り当てられているときのみ定義され、(a)(b)の選別素子では $z=0$ ($z=1$) のとき左(右)出力線上に z が、右(左)出力線上に $*$ が出力され、(c)の素子では z が出力される。

n を自然数とし、 $N=2^n$ とおき、 $N-1$ 入力巡回シフト回路の構成法を以下に示す。図1の素子を $n+1$ 行 $N-1$ 列に並べる。第1行はⅢのタイプ、第 $n+1$ 行はⅡのタイプ、それ以外はⅠのタイプの素子とする。第1行第 $j+1$ 列の素子の右(左)入力を f_j (l_j) とし、出力を回路の出力 y_j とする ($0 \leq j \leq N-2$)。第 $k+1$ 行

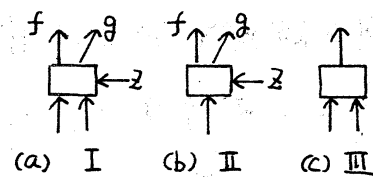


図 1

第 $j+1$ 列の素子の右(左)入力を $r_{kj}(l_{kj})$, 右(左)出力を $g_{kj}(f_{kj})$ とし制御入力を z_{k-1} とする($1 \leq k \leq n$, $0 \leq j \leq N-2$). 但し第 $n+1$ 行, 第 $j+1$ 列の素子の入力は回路の入力 x_j とする($0 \leq j \leq N-2$). $1 \leq k \leq n$, $0 \leq j \leq N-2$ に対して, f_{kj} は $r_{k-1,j}$ に g_{kj} は $l_{k-1, (j+2^{k-1}) \bmod (N-1)}$ に接続する。この回路の第 $k+1$ 行では制御入力 z_{k-1} によって大きさ 2^{k-1} のシフトを実現できるので巡回シフトの機能を持つ。この回路をそのままVLSI上に実現しようとする $O(N^2)$ の配線面積を必要とする。以下では、配線面積の少ない循環型の回路の構成法を示す。次の定理は、上述の巡回シフト回路において各行の素子を適当に並べかえることにより、各行間の接続がすべて同じパターンとなるようにできることを示す。(証明略)

定理1 上述の巡回シフト回路において、第 $k+1$ 行($1 \leq k \leq n$)の素子を置換 $(r_k g) = 2^{n-k} \cdot j \bmod (N-1)$ で並べかえると $f_{k,i}$ は $r_{k-1, 2i \bmod (N-1)}$ に $g_{k,i}$ は $l_{k-1, (2i+1) \bmod (N-1)}$ に接続される($1 \leq k \leq n$, $0 \leq i \leq N-2$).

ダブルシャフルグラフを0から $N-2$ までのラベルのついた $N-1$ 個の頂点を持ち、頂点 i が $2i \bmod (N-1)$ と $(2i+1) \bmod (N-1)$ に接続されているものと定義する($0 \leq i \leq N-2$). ダブルシャフルグラフの各頂点を図1のIのタイプの選別素子で置き換え、制御入力用の配線を加えて構成される循環型回路は定理1より巡回シフトを実行する。以下ではこの循環型回路をThompsonのVLSIの計算モデルに従って格子平面に埋め込むことを考える。

各素子は頂点と見なし、格子点上に置き、配線は格子線に沿って行なう。格子点上でのみ2本の配線が交差することが許されるものとする。格子線の間隔を1として回路中のすべての素子と配線を埋め込むのに必要な最小の長方形の面積を回路の面積とする。循環型シフト回路において、制御入力用の配線は $O(N)$ の面積でできるので、埋め込み面積のオーダーのみを問題にする限りダブルシャフルグラフの埋め込みに必要な面積を求めればよいことになる。このグラフの頂点 i と $2i \bmod (N-1)$ の間の接続はシャフルエクスチェンジグラフのシャフル接続だから、ダブルシャフルグラフを埋め込むのにこれまでにいろいろ提案されているシャフルエクスチェンジグラフの埋め込みが利用できる。

定理2 ダブルシャフルグラフは $O(N^2 / \log^2 N)$ の面積に埋め込まれる。

証明 Thompson のシャフルエクスチェンジグラフの埋め込みを利用する。^[1] ダブルシャフルグラフの 0 から $N-2$ までの頂点をその2進表示が含む '1' の個数によって分割する。 $E_x(O_x)$ を2進表示すると '1' を x 個含むような偶数(奇数)頂点の集合とする。 $2i \in E_x$ ならば $2i+1 \in O_{x+1}$ だから、 E_x と O_{x+1} は同数個の頂点を含む。 E_x と O_{x+1} を一組にして x が増加する順に頂点を2本の水平線上に並べる。 x が偶数のときは E_x を上に O_{x+1} を下に x が奇数

のときは逆にする。配線はいずれも頂点から垂直に上り、それから適当な水平線で目的の頂点の上まで行き、そこから垂直に下るものとする。各頂点は入次数、出次数共に2だから垂直配線には $O(N)$ の格子線があれば十分であり、配線に要する領域の横幅は $O(N)$ で押えられる。以下では水平線の本数を評価することにより、配線の領域の高さが $O(N/\log^2 N)$ で押えられることを示す。 i と $2i \bmod (N-1)$ はその2進表示が同数個の"1"を含むから、これらの頂点はいずれも適当な x に対して $E_x \cup O_x$ に含まれる。したがって頂点 i と $2i \bmod (N-1)$ の間の接続は $E_x \cup O_x$ に属する頂点間で行なわれる。 $\max_x |E_x \cup O_x| = |E_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \cup O_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = O(N/\log^2 N)$ であるから、 E_x と O_x が隣接して配置されていることに注意すると、このタイプの接続は $O(N/\log^2 N)$ の高さの領域で実現できる。残りの頂点 i と $(2i+1) \bmod (N-1)$ の間の接続は、次のように場合分けして考える。

i) $0 \leq i \leq \frac{N}{2}-2$ の場合、このとき $(2i+1) \bmod (N-1) = 2i+1$ である。 i の2進表示を $\text{bin}(i) = 0a_1 \cdots a_{n-1}$ と書くと $\text{bin}(2i+1) = a_1 \cdots a_{n-1}1$ であるから、 $i \in E_x \cup O_x$ ならば $2i+1 \in O_{x+1}$ である。このタイプの接続も $O(N/\log^2 N)$ の高さの領域で実現できる。

ii) $i = \frac{N}{2}-1$ の場合は、 i は $(2i+1) \bmod (N-1) = 0$ に接続する。

iii) $\frac{N}{2} \leq i \leq N-2$ の場合、このとき $(2i+1) \bmod (N-1) = 2i+2-N$ である。

iii)-i) i が偶数の場合、 i の2進表示を $\text{bin}(i) = 1a_1 \cdots a_{n-2}0$ と

書くと $\text{bin}(2i+2-N) = a_1 \cdots a_{n-2} 10$ となる。したがって $i \in E_x$ ならば $2i+2-N \in E_x$ で、このタイプの接続も $O(N/\log^{1/2} N)$ の高さの領域で実現できる。

iii)-ii) i が奇数の場合、 i の2進表示は $i \leq N-2$ であることに注意すると、定数 j が存在して $\text{bin}(i) = 1a_1 \cdots a_p 0 \overbrace{11 \cdots 1}^j$ ($p = n-j-2$) と表わされ $\text{bin}(2i+2-N) = a_1 \cdots a_p 1 \overbrace{00 \cdots 0}^{j+1}$ となる。したがって $i \in O_x$ ならば $(2i+2-N) \in E_y$ ($y < x$) である。ここで $j = x-y$ ($p = n-x+y-2$) であって $a_1 \cdots a_p$ 中に "1" が $y-1$ 個存在することになる。 $m(x, y)$ を O_x 中の頂点から E_y 中の頂点へのこのタイプの接続の総数、すなわち $m(x, y) = |\{i \in O_x \mid \frac{N}{2} \leq i \leq N-2, (2i+2-N) \in E_y\}|$ とする。前述のこゝより $x \leq y$ のときは $m(x, y) = 0$, $x > y$ のときは $m(x, y) = \binom{n-x+y-2}{y-1}$ である。 $f(y)$ を $O_{n-1}, O_{n-2}, \dots, O_{y+1}$ 中の頂点から E_1, E_2, \dots, E_y 中の頂点へのこのタイプの接続の総数とすると

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{x=y+1}^{n-1} \sum_{z=1}^y m(x, z) = \sum_{x=y+1}^{n-1} \sum_{z=1}^y \binom{n-x+z-2}{z-1} \\ &= \sum_{x=y+1}^{n-1} \binom{n-x+y-1}{y-1} = \sum_{u=y}^{n-2} \binom{u}{y-1} = \binom{n-1}{y} - 1 \end{aligned}$$

となり、 $\max_y f(y) = f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1 = O(N/\log^{1/2} N)$ を得る。したがってこのタイプの接続も $O(N/\log^{1/2} N)$ の高さの領域で実現できる。

以上から、ダブルシャフルグラフは幅 $O(N)$ 高さ $O(N/\log^{1/2} N)$ の格子平面に埋め込まれる。(証明終)

定理3 ダブルシャフルグラフは $O(N^2/\log N)$ の面積に埋め込まれる。

証明 Steinberg, Rodeh のシャフルエクスチェンジグラフの埋め込みを利用する。^[2] 準備として次のような定義を行なう。
 $0 \leq \alpha \leq 2^l$ なる整数 α の l ビット 2 進表示を $\text{bin}_l(\alpha)$ で表わす。
 $\text{bin}_l(\alpha) = \alpha_{l-1} \alpha_{l-2} \cdots \alpha_0$ とする。 $\text{Alt}(\text{bin}_l(\alpha))$ を $\text{bin}_l(\alpha)$ 中の隣り合うビットが異なる値をもつ箇所の個数を表わすものとする。
 但し α_{l-1} と α_0 は隣り合っているものとする。

$$A_i(l) = \{\alpha \mid 0 \leq \alpha < 2^l, \text{bin}_l(\alpha) \text{ は } l \text{ 度 } i \text{ 個の "1" を含む}\}$$

$$A_i^j(l) = \{\alpha \in A_i(l) \mid \text{Alt}(\text{bin}_l(\alpha)) = 2j\}$$

$$A_{i,j}^j(l) = \{\alpha \in A_i^j(l) \mid \alpha_{l-1} = \alpha_0 = 1\}$$

とする。以下では簡単のため bin_l の添字 l は省略し、 $A_i^j(n)$ を A_i^j と書く。 $|A_{i,j}^j(l)| = \binom{i-1}{j} \binom{l-i-1}{j-1}$ となることは明らかである。

ダブルシャフルグラフの 0 から $N-2$ までの頂点を A_i^j に分割する。頂点 α と $2\alpha \bmod (N-1)$ の間の接続に関しては $\text{bin}(\alpha) = \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \cdots \alpha_0$ ならば $\text{bin}(2\alpha \bmod (N-1)) = \alpha_{n-2} \cdots \alpha_0 \alpha_{n-1}$ であるから、この接続によって結ばれる 2 頂点は同じ A_i^j に属する。頂点 α と $(2\alpha+1) \bmod (N-1)$ の間の接続は次のように場合分けして考える。

i) $0 \leq \alpha \leq \frac{N}{2}-2$ の場合. このとき $(2\alpha+1) \bmod (N-1) = 2\alpha+1$ である。
 $\text{bin}(\alpha) = 0 \alpha_{n-2} \cdots \alpha_0$ と書くとき $\text{bin}(2\alpha+1) = \alpha_{n-2} \cdots \alpha_0 1$ であるから $\alpha \in A_i^j$ ならば $(2\alpha+1) \in A_{i+1}^{j-1} \cup A_{i+1}^j \cup A_{i+1}^{j+1}$ である。

ii) $\alpha = \frac{N}{2}-1 \in A_{n-1}^1$ の場合は $(2\alpha+1) \bmod (N-1) = 0 \in A_0^0$ に接続する。

iii) $\frac{N}{2} \leq \alpha \leq N-2$ の場合. このとき $(2\alpha+1) \bmod (N-1) = 2\alpha+2-N$.

iii)-i) α が偶数の場合. $\text{bin}(\alpha) = 1\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1 0$ とすると, $\text{bin}(2\alpha+2-N) = \alpha_{n-2}\cdots\alpha_1 10$ である. $\alpha \in A_i^j$ ならば $(2\alpha+2-N) \in A_i^{j-1} \cup A_i^j \cup A_i^{j+1}$.

iii)-ii) α が奇数の場合. $\text{bin}(\alpha) = 1a_1\cdots a_p 0 \overbrace{11\cdots 1}^k$ ($p = n-k-2, k \geq 1$) と表わされ $\text{bin}(2\alpha+2-N) = a_1\cdots a_p 1 \overbrace{00\cdots 0}^{k+1}$ となる. $\alpha \in A_i^j$ ならば $(2\alpha+2-N) \in \bigcup_{k \geq 1} (A_{i-k}^{j-1} \cup A_{i-k}^j \cup A_{i-k}^{j+1}) = \bigcup_{y < i} (A_y^{j-1} \cup A_y^j \cup A_y^{j+1})$.

ここで行なうダブルシャッフルグラフのレイアウトを図2に示す. 第 i 行第 j 列は A_i^j に属する頂点を配置する場所である. $j > \min(i, n-i)$ に対して A_i^j は空である. 各 j 列には $\max_i |A_i^j|$ の定数倍の幅を, 各 i 行には $\max_j |A_i^j|$ の定数倍の高さを割り当てる. 第 j 列と第 $j+1$ 列の間の列 G_j は $\frac{N}{2} \leq \alpha$ なる奇数頂点, α と $2\alpha+2-N$ との間の接続の垂直配線用の領域で, G_j に割り当てられる幅を g_j で表わす. 各 A_i^j 中の頂点は α と $2\alpha \bmod (N-1)$ との間の接続を α のように水平に一列に並べる. 頂点 α と $(2\alpha+1) \bmod (N-1)$ の間の接続は $\alpha \in A_i^j$ とすると, $\alpha \leq \frac{N}{2}-2$ の場合は $(2\alpha+1) \bmod (N-1)$

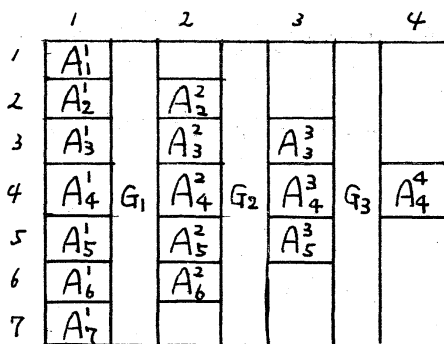


図 2

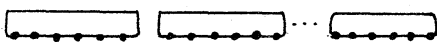


図 3

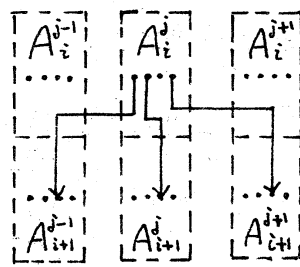


図 4

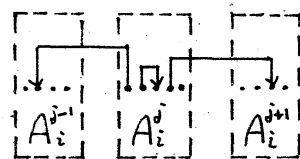


図 5

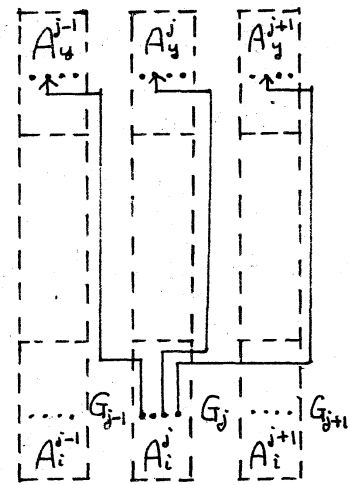


図 6

$\in A_{i+1}^{j-1} \cup A_{i+1}^j \cup A_{i+1}^{j+1}$ だから図4のように行なう。 $\alpha \geq \frac{N}{2}$ で α が偶数の場合は $(2\alpha+1) \bmod (N-1) \in A_i^{j-1} \cup A_i^j \cup A_i^{j+1}$ だから図5のように、 α が奇数の場合は $(2\alpha+1) \bmod (N-1) \in A_y^{j-1} \cup A_y^j \cup A_y^{j+1}$ ($y < i$) だから図6のように行なう。このレイアウトにおいて全体の高さは $O(\sum_i \max |A_i^j|)$, 幅は $O(\sum_j \max_i |A_i^j|)$ である。 $\sum_i \max_j |A_i^j| = O(N/\log^{\frac{1}{2}} N)$ であることは[2]に示されている。 $\sum_j \max_i |A_i^j| = \sum_j |A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^j| = |A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = O(N/\log^{\frac{1}{2}} N)$ であるから、ダブルシャフルグラフが $O(N/\log N)$ の面積に埋め込めることを示すためには、 $\sum_j g_j = O(N/\log^{\frac{1}{2}} N)$ を示せばよい。 g_j を求めるために $\frac{N}{2} \leq \alpha$ なる奇数頂点 α と $(2\alpha+1) \bmod (N-1)$ の間の接続について調べる。 $f_j(y)$ を A_x^{j-1}, A_x^j 及び A_x^{j+1} ($x > y$) 中の頂点から A_z^j ($z \leq y$) 中の頂点へのこのタイプの接続の総数とすると $g_j = \max_y f_j(y)$ とすれば十分である。 $f_j(y)$ を求めるために $B_{i,k}^j(l) = \{\alpha \in A_i^j \mid \frac{N}{2} \leq \alpha \leq N-2, \alpha \text{ は奇数}, 2\alpha+2-N \in A_{i-k}^{j+l}\}$ ($l = -1, 0, 1$) と定義される集合の大きさを求める。まず $|B_{i,k}^j(1)| = \binom{i-k-2}{j-1} \binom{n-i-2}{j-1}$ を示す。 $\alpha \in B_{i,k}^j(1)$ の2進表示は $\text{bin}(\alpha) = 1b_1 \cdots b_g 0 \overbrace{011 \cdots 1}^k$ ($g = n-k-4$) と書ける。 r を2進表示が $1b_1 \cdots b_g 0$ なる整数とすると $\alpha \in A_i^j$ より $r \in A_{i-k-1}^j(n-k-2)$ である。

$$\begin{aligned}
 |B_{i,k}^j(1)| &= |\{\alpha \in A_{i-k-1}^j(n-k-2) \mid \text{bin}(\alpha) = 1b_1 \cdots b_g 0\}| \\
 &= |\{\alpha' \in A_{i-k-1}^{j-1}(n-k-3) \mid \text{bin}(\alpha') = 1b_1 \cdots b_{g-1} 1\}| \\
 &\quad + |\{\alpha' \in A_{i-k-1}^{j-1}(n-k-4) \mid \text{bin}(\alpha') = 1b_1 \cdots b_{g-2} 1\}| + \cdots \\
 &= \sum_{l \geq 3} |A_{i-k-1}^{j-1}(n-k-l)| = \sum_{l \geq 3} \binom{i-k-2}{j-1} \binom{n-i-l}{j-2} = \binom{i-k-2}{j-1} \binom{n-i-2}{j-1}
 \end{aligned}$$

同様の計算により $|B_{i,k}^j(-1)| = \binom{i-k-2}{j-2} \binom{n-i-2}{j-2}$, $|B_{i,k}^j(0)| = \binom{i-k-2}{j-1} \binom{n-i-2}{j-2} + \binom{i-k-2}{j-2} \binom{n-i-2}{j-1}$ が示される。これより次の $m_j(x,y)$ が計算される。

$$m_j(x,y) = |\{\alpha \in A_x^{j-1} \cup A_x^j \cup A_x^{j+1} \mid \frac{N}{2} \leq \alpha \leq N-2, \alpha \text{ は奇数}, 2\alpha+2-N \in A_y^j\}|$$

$$= |B_{x,x-y}^{j+1}(-1)| + |B_{x,x-y}^{j-1}(1)| + |B_{x,x-y}^j(0)| = \binom{y-1}{j-1} \binom{n-x-1}{j-1}$$

$f_j(y)$ を先に定義したものとすると $f_j(y) = \sum_{x \geq y+1} \sum_{z \leq y} m_j(x,y) = \sum_{x \geq y+1} \sum_{z \leq y} \binom{z-1}{j-1} \binom{n-x-1}{j-1} = \binom{y}{j} \binom{n-y-1}{j}$ となるから $g_j = \max_y f_j(y) = f_j(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor) \leq \left\{ \binom{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}{j} \right\}^2$ となる。 $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} g_j \leq \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left\{ \binom{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}{j} \right\}^2 = \binom{2 \cdot \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} = O(N / \log^{\frac{1}{2}} N)$ (証明終)

Kleitman らによるシャフルシフトグラフの $O(N^2 / \log^2 N)$ の面積の埋め込み^[3]を利用すると、ダブルシャフルグラフが $O(N^2 / \log^2 N)$ の面積に埋め込めることを示すのは比較的容易である。この結果を利用すると巡回シフトは面積時間複雑度 $AT^2 = O(N^2 \log N)$ で実現できるが、これは最小2分割^[1]の概念を使って得られる下界 $AT^2 = \Omega(N^2 \log^2 N)$ に一致する^[4]。但し Kleitman らの方法を利用した埋め込みは十分大きな N に対してのみ具体的なレイアウトを与えるものである。

参考文献

- [1] C.D. Thompson "A Complexity Theory for VLSI" Ph. D. Thesis Carnegie-Mellon University Comput. Sci. Dept. (1980)
- [2] D. Steinberg, M. Rodeh "A Layout for the Shuffle-Exchange Network with $O(N^2 / \log N)$ area" Information Processing Letters vol 12, no 12 83-88 (1981)
- [3] D. Kleitman, F.T. Leighton, M. Lepley, G.L. Miller "New Layouts for the Shuffle-Exchange Graph" Proc 13th ACM Symp. on Theory of Computing 278-292 (1981)
- [4] 瀬谷, 丸岡, 木村 "巡回シフトの面積時間複雑度について" 電子通信学会オートマトンと言語研究会 (1982. 3月)